第 27 卷第 3 期　　商丘师范学院学报　　Vol. 27 No. 3
2011 年 3 月　　JOURNAL OF SHANGQIU TEACHERS COLLEGE　　March, 2011

关于 F. Smarandache 简单函数的均值

刘　华

(商丘师范学院 数学系,河南 商丘 476000)

摘　要:主要利用解析的方法研究了函数 $d(p(n))$ 的均值性质,并给出了它的两个有趣的渐近公式.

关键词:F. Smarandache 函数;数论函数;均值;渐近公式

中图分类号:O156.4　　文献标识码:A　　文章编号:1672-3600(2011)03-0024-02

The mean value on F. Smarandache function

LIU Hua

(Department of Mathematics, Shangqiu Teachers College, Shangqiu 476000, China)

Abstract: The mean value on the F. Smarandache function is studied. By using the analytic methods, The asymptotic poperties of $d(p(n))$ are studied, then two interesting asymptotic formulas are obtained.

Key words: F. Smarandache function; arithmetical functiion; mean value; asymptotic formula

0　引言及结论

对于任意的正整数 n,F. Smarandache 函数定义为最小的正整数 m 能够被 n 整除的 $m!$,在文献[1]中 JozsefSandor 给我们引入了 Smarandache 简单加性函数:

$$p(x) = \min\{m \in N^{+}: p^{x} \leqslant m!\}$$

和

$$p^{*}(x) = \min\{m \in N^{+}: m! \leqslant p^{x}\}$$

以上两个函数都是定义在实数集上.从上面的定义很容易看出这样的结论:对于大于等于 1 的实数 x,当 $(m-1)! < p^{x} \leqslant m!$ 时 $p(x) = m$ 对于 $p(x)$ 的性质很多专家学者都做过相关的研究,例如[1][2].但是对于 $d(p(x))$ 均值的研究还未曾看到,这里 $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数,本文主要利用解析的方法研究了 $d(p(n))$ 的渐进性质,并给出了两个有趣的渐近公式,也就是下面我们要证明的定理:

定理 1　设 p 为一个给定素数,对于任意实数 $x \geqslant 1$,有

$$\sum_{n \leqslant x} d(p(n)) = x(\ln x - \ln\ln x) + o(x).$$

定理 2　设 p 为一个给定素数,对于任意实数 $x \geqslant 1$,有

$$\sum_{n \leqslant x} d(p^{*}(n)) = x(\ln x - \ln\ln x) + o(x).$$

1　两个简单的引理及定理的证明

本节我们将完成定理的证明,首先我们需要如下引理:

引理 1　对于任意实数 x,有下面结论:

收稿日期:2010-07-06

基金项目:河南省教育厅科研基金资助项目(2009A110013)

作者简介:刘华(1982-),女,河南商丘人,商丘师范学院教师,主要从事基础数论研究.

$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\ln x + (2c-1)x + o(\sqrt{x}).$$

这里 c 为 Euler′s 常数. 证明参照文献 [3].

引理 2　对于任意实数 x，有下面结论:

$$\sum_{i=1}^{x} \frac{\ln i}{i} = \frac{1}{2}\ln^2 x + A + o\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

这里 A 为常数. 证明参照文献 [3].

接下来我们就利用上面的引理来证明定理，由 $d(n)$ 及 $p(n)$ 的定义可知

$$\sum_{n\leqslant x} d(p(n)) = \sum_{n\leqslant x} \sum_{\frac{\ln(m-1)!}{\ln p} < m \leqslant \frac{\ln(m)!}{\ln p}} d(m)$$

因为当 $n \in \left(\frac{\ln(m-1)!}{\ln p}, \frac{\ln(m)!}{\ln p}\right]$ 时，$p(n) = m$，又因为 $n \leqslant x$ 那么区间 $\left(\frac{\ln(m-1)!}{\ln p}, \frac{\ln(m)!}{\ln p}\right]$ 中最大的数也一定小于等于 x，于是我们得到 $\frac{\ln(m)!}{\ln p} \leqslant x$ 即 $\ln(m)! \leqslant x\ln p$ 结合 Euler 求和公式，即可得到 $\ln m!$ 的主项为 $m\ln m$ 并且 $m\ln m \leqslant x\ln p$.

如果 x 足够大，那么 $\ln m$ 渐近于 $\ln x$，于是有 $m \leqslant \frac{x\ln p}{\ln x}$，根据上面的讨论我们可以得到:

$$\sum_{n\leqslant x} d(p(n)) = \sum_{n\leqslant x} \sum_{\frac{\ln((m-1)!)}{\ln p} \leqslant n \leqslant \frac{\ln(m)!}{\ln p}} d(m) = \sum_{m\leqslant \frac{x\ln p}{\ln x}} \left[\frac{\ln m}{\ln p}\right] d(m) + o(x\ln p) = \sum_{m\leqslant \frac{x\ln p}{\ln x}} \frac{\ln m}{\ln p} d(m) + o(x) =$$
$$\left(\frac{1}{\ln p}\right) \sum_{un\leqslant \frac{x\ln p}{\ln x}} \ln(un) + o(x) = \left(\frac{2}{\ln p}\right) \sum_{u\leqslant \frac{x\ln p}{\ln x}} \ln u(u) \sum_{n\leqslant \frac{x\ln p}{\ln x}} + o(x) = \left(\frac{2}{\ln p}\right) \sum_{u\leqslant \frac{x\ln p}{\ln x}} \ln u \left[\frac{x\ln p}{u\ln x}\right] +$$
$$o(x) = \left(\frac{2x}{\ln p}\right) \sum_{u\leqslant \frac{x\ln p}{\ln x}} \frac{\ln u}{u} + o(x) = \left(\frac{2x}{\ln p}\right)\left(\frac{1}{2}(\ln x + \ln\ln p - \ln\ln x)^2\right) + o(x) = x(\ln x -$$
$$2\ln\ln x) + o(x).$$

这样定理 1 就得到了证明.

使用相同的方法就可以证明定理 2.

参考文献:

[1] Jozsef Sandor. On additive analogue of certain arithmetic functions [J]. Smarandache Note Journal, 2004, 14: 128 – 132.

[2] Le Maohua. Some Problems Concerning the Smarandache Square Complementary Function [J]. Smarandache Notions Jounral, 2004, 14: 220 – 222.

[3] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. Springer – Verlag, New York, 1976.

[4] Zhu Minhui. The additive analogue of Smarandache simple function [A]. Research on Smarandache proble in number theory, Hexis, 2004. 39 – 41.

[5] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社，1988.

[6] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社，1999.

[7] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社，2007.

【责任编辑: 王军】